数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 143-150


# An Optimal Investment Strategy for Insurance Companies with a Linear Gaussian Stochastic Factor Model

静岡大学・教育学部　畑　宏明
Hiroaki Hata
Faculty of Education
Shizuoka University
法政大学・理工学部　安田　和弘
Kazuhiro Yasuda
Faculty of Science and Engineering
Hosei University

**Abstract**

保険数理におけるリスク理論に関する最近の研究結果のサーベイを与える．特に，危険資産への投資を加味した期待効用最大化問題の研究を中心に紹介する．

## 1　イントロダクション

保険数理では，保険料収入と支払いのみを加味したリスク過程に対する破産確率 (ruin probability) を求めることが重要で，1903 年の Lundberg [13] 以降長く研究されている．

**定義 1.1** リスク過程 $R_t$ は，$x \in (0,\infty)$ を初期資本，関数 $C(t)$ を時刻 $t$ までの累積保険料，確率過程 $J_t$ を時刻 $t$ までの支払い総額としたとき，次のように定義される：

$$R_t = x + C(t) - J_t.$$

特に，$c \in (0,\infty)$ を単位時間あたりの保険料収入とし $C(t) = ct$ と表され，強度 $\lambda$ のポアソン過程 $N_t$ を時刻 $t$ までの支払い件数，独立同分布な非負確率変数列 $\{Y_i\}_{i=1,2,\dots}$（$N_t$ とも独立）を各支払い金額とし，$J_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ と与えられるとき Cramér-Lundberg モデルと呼ばれる．また，$N_t$ が再生過程のとき，Sparre-Andersen モデルと呼ばれる．

次に破産確率の定義を与える．$R_t < 0$ となることを破産とすると，破産時刻は $\tau_x = \inf\{t > 0 : R_t < 0\}$ と定義される．ただし，$\inf\emptyset = \infty$ とする．

**定義 1.2** 破産確率を $\varepsilon(x) = P(\tau_x < \infty)$ と定義する．

Cramér-Lundberg モデルで，$Y_i$ が期待値 $\theta \in (0,\infty)$ の指数分布に従うとき，

$$\varepsilon(x) = \frac{\lambda\theta}{c}\exp\left(-\frac{(c-\theta)\lambda x}{c\theta}\right)$$

となることが知られている．詳細やその他の結果は井上等 [1]，ミコシュ[2]，Grandell [9] を参照するとよい．

近年では保険事業における損益だけではなく，株式市場などで運用した損益までを組み込んだ研究がなされてきている．その際に，運用の良し悪しの指標として期待効用がたびたび用いられる．ここでいう効用とは，上で定義したリスク過程 $R_t$ に運用から生じる損益を加えた総額（富過程）$X_t$ に対する満足度であり，運用に対してリスクを加味した指標となっている．特に，リスク回避的な投資家の効用関数は狭義単調増加かつ狭義凹な実数値連続関数（多くの場合，さらに微分可能性なども仮定される）で表現される．効用理論に関するより詳しいことは井上等 [1] を参考にされるとよい．保険数理におけるリスク理論では，効用関数として指数型効用関数 を用いることが多い．その理由はいくつか考えられる．指数型効用関数は有名なリスク回避的な効用関数（対数型やベキ型など）の中ではもっともリスク回避度が高く，その点が保守的な保険事業の評価に適していると考えられる．また別の理由として，Ferguson [5] において，投資が存在する状況では，指数型効用関数を用いた期待効用最大化を考えることが破産確率を最小化することと同値であるという予想が成されたこともあげられる．Browne [4] では，この予想は一定の条件下では支持されるが，一般の正の金利を持つ安全資産が存在する状況では成り立たないことが示されている．本稿では，このような観点から近年のリスク理論における指数型期待効用最大化問題に関する結果（Browne [4]，Fernández et al. [6]，Badaoui et al. [3]，Hata et al. [10]）のサーベイを与える．本稿では詳細は取り上げられないがその他にも，Hipp et al. [11] では安全資産はなく，危険資産に Black-Scholes モデルを仮定し，破産確率を最小化する問題に対する最適戦略を与えている．Gaier et al. [8] や Hipp et al. [12] では，[11] と同様の状況で，破産確率の漸近的性質 (Lundberg 指数) について調べられている．Ynag et al. [15] では，安全資産が存在し，危険資産に Black-Scholes モデルを仮定し，リスク過程 $R_t$ にジャンプ拡散過程を仮定した状況の下で，指数型期待効用最大化問題および生存確率最大化問題に対して，最適戦略などを求めている．Wang [14] では，安全資産が存在し，危険資産は Black-Scholes モデルではあるが多資産の場合を考え，リスク過程 $R_t$ の支払い総額過程 $J_t$ が単調非減少で右連続なピュアジャンプ過程という設定で，指数型期待効用最大化問題および生存確率最大化問題に対して，最適戦略などを求めていて，Hipp et al. [11]，Gaier et al. [8] や Hipp et al. [12] を含む結果を与えている．

## 2 モデルおよび問題の設定

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ をフィルトレーション付き完備確率空間とする．ただし，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ は通常の条件を満たすとする．本稿に出てくる確率過程はすべて $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-適合とする．また，多次元でも成り立つ結果もあるが，以下に出てくる過程は簡単のためすべて 1 次元とする．

GDP や失業率などの経済ファクタ過程 $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ は次の確率微分方程式に従うとする：

$$dZ_t = g(Z_t)dt + \sigma_f\left\{\rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^{(2)}\right\},\quad Z_0 = z \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

ただし，$\sigma_f$ は正の定数，$\rho \in [-1,1]$，$\{W_t^{(1)}\}$，$\{W_t^{(2)}\}$ は独立な標準ブラウン運動とし，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする．本稿で実際にファクタ過程が関わるのは，ファクタモデルを採用している Badaoui et al. [3] と Hata et al. [10] だけである．

$r,\ \mu,\ \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をそれぞれ金利，危険資産のリターン，危険資産のボラティリティを表す関数とする．安全資産過程 $\{S_t^0\}_{t\geq 0}$ は次の常微分方程式に従うとする：

$$dS_t^0 = r(Z_t)S_t^0 dt, \quad S_0^0 = s_0^0\ (>0). \tag{2.2}$$

危険資産過程 $\{S_t\}_{t\geq 0}$ は次の確率微分方程式に従うとする：

$$dS_t = S_t\left\{\mu(Z_t)dt + \sigma(Z_t)dW_t^{(1)}\right\},\ S_0 = s_0\ (>0). \tag{2.3}$$

本稿では，以下を常に仮定する．

**仮定 2.1** $g,\ \mu,\ \sigma$ は *(2.1)* および *(2.3)* が強解を持つような関数とする．また，$r$ は *a.s.* に *(2.2)* が解を持つような関数とする．

$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ とし，$N_t$ を強度過程 $\{\lambda(Z_t)\}_{t\geq 0}$ の Cox 過程とする．$\{Y_i\}_{i=1,2,\dots}$ は独立同分布 $\nu$ を持つ正値確率変数列で，$\{W_t^{(1)}\}, \{W_t^{(2)}\}, \{N_t\}$ とは独立とする．リスク過程 $R_t$ は，

$$R_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \tag{2.4}$$

と表されるものとする．

$\pi = \{\pi_t\}_{t\geq 0}$ を各時刻における危険資産への投資額とする．これは，適当な可積分条件を満たす $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-発展的可測過程のとき許容戦略と呼ばれ，それらの族を $\mathcal{A}$ と表すこととする．$\pi \in \mathcal{A}$ に対して，リスク過程と投資による損益を加えた富過程 $\{X_t^\pi\}_{t\geq 0}$ が次のように表されるとする：

$$X_t^\pi = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i + \int_0^t \left\{\pi_u \frac{dS_u}{S_u} + (X_u^\pi - \pi_u)\frac{dS_u^0}{S_u^0}\right\}. \tag{2.5}$$

$T>0$ を満期とし，$U(x)$ を効用関数とすると，考える問題は次のように表される：

$$\sup_{\pi\in\mathcal{A}} E_x\left[U(X_T^\pi)\right]. \tag{2.6}$$

特に本稿では，効用関数として指数型効用関数 $U(x) = -\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma x}\ (\gamma \in (0,\infty))$ を考える．

# 3 各結果

## 3.1 Browne [4] の結果

この節では，Ferguson [5] の予想に対して答えを与えた Browne [4] の論文について紹介する．安全資産および危険資産の係数は，$r(z)\equiv 0,\ \mu(z)\equiv\mu,\ \sigma(z)\equiv\sigma\ (>0)$ の場合を考えている．つまり，ファクタ過程は関係せず，正の金利の安全資産も存在しない場合を考える．また，Browne [4] ではリスク過程 $R_t$ として，次のドリフト付きブラウン運動 $\{\overline{R}_t\}_{t\geq 0}$ を考えている：

$$d\overline{R}_t = \alpha dt + \beta dB_t.$$

ただし，$\alpha, \beta\,(>0)$ は定数，$B_t$ は標準ブラウン運動とし，$E[W_t^{(1)}B_t] = \rho_0 t$ を満たすとする．これは，$\{N_t\}$ が強度 $\lambda\,(>0)$ のポアソン過程としたときの (2.4) のリスク過程 $\{R_t\}$ を，$\alpha = c - \lambda E[Y_1]$，$\beta^2 = \lambda E[Y_1^2]$ として近似した過程と考えられる．このとき，富過程は

$$d\overline{X}_t^\pi = d\overline{R}_t + \pi_t \frac{dS_t}{S_t}$$

として考えている．ただし，ここでは任意の $T < \infty$ に対して $\int_0^T \pi_t^2 dt < \infty$ *a.s.* を満たす戦略を許容戦略とする．このとき指数型効用関数に対して，次が得られる．

**定理 3.1** *(Theorem 1 in Browne* [4]*)* 指数型期待効用最大化問題 *(2.6)* に対して，最適戦略は任意の $t \le T$ に対して，$\pi^* = \frac{\mu}{\sigma^2\gamma} - \frac{\rho_0\beta}{\sigma}$ で与えられる．また，値関数 $W(t,x)$ は次のようになる：

$$W(t,x) = -\frac{1}{\gamma}\exp\left\{-\gamma x + (T-t)\left(\frac{\gamma^2\beta^2}{2}(1-\rho_0^2) - \gamma\left(\alpha - \frac{\rho_0\beta\mu}{\sigma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right)\right)\right\}.$$

$\tau_z^\pi = \inf\{t > 0 : X_t^\pi = z\}$ とし，$\tau^\pi = \min\{\tau_a^\pi, \tau_b^\pi\}$ とする．このとき，次が成り立つ．

**定理 3.2** *(Theorem 2 in Browne* [4]*)*

$$\eta^+ := \frac{\alpha - \rho_0\beta\mu/\sigma + \sqrt{D}}{\beta^2(1-\rho_0^2)}, \quad D := \left(\alpha - \frac{\rho_0\beta\mu}{\sigma}\right)^2 + \beta^2(1-\rho_0^2)\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2, \quad C := \frac{\mu}{\sigma^2\eta^+} - \frac{\rho_0\beta}{\sigma}$$

とする．$a < x < b$ に対して $P(X_{\tau^\pi}^\pi \ge b | X_0 = x) = P(\tau^\pi = \tau_b^\pi | X_0 = x)$ を最大化する問題に対して，最適戦略は $\pi^* = C$ となる．

ここで，$\eta^+ \ge 0$ であり，$\gamma = \eta^+$ のとき指数型期待効用最大化問題の戦略と同じになり，Ferguson [5] の予想が成り立っていることが分かる．

次に任意の $t \in [0,T]$ に対して借り入れ制約 $0 \le \pi_t \le X_t^\pi$ の下で破産確率の最小化を考え，その最適戦略を Browne [4] の Theorem 3 で与えている．また，割引率を $\phi\,(>0)$ として，閾値 $a$ に到達したらペナルティ $M\,(>0)$ を支払うとしたときの，割引期待ペナルティを最小化する問題に対して，Browne [4] の Theorem 4 で最適戦略を与えている．

最後に，正の金利を持つ安全資産があるとき，つまり $r(z) \equiv r > 0$ の場合を考える．

**定理 3.3** *(Theorem 5 in Browne* [4]*)* 指数型期待効用最大化問題 *(2.6)* に対して，最適戦略は $\pi_t^* = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2}e^{-r(T-t)} - \frac{\rho_0\beta}{\sigma}$ となる．

一方で，次の定理も与えられている．

**定理 3.4** *(Theorem 6 in Browne* [4]*)* $P_x(X_{\tau^\pi}^\pi \ge b)$ となる確率を最大化する問題（つまり，破産確率を最小化する問題）に対して，最適戦略は次のように与えられる：

$$\pi^*(x) = \frac{1}{\mu - r}\left\{\sqrt{\left(rx + \alpha - \frac{\rho_0\beta(\mu - r)}{\sigma}\right)^2 + (1-\rho_0^2)\beta^2\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2} - (rx + \alpha)\right\}.$$

これらの定理から，正の金利を持つ安全資産が存在するとき，Ferguson [5] の予想が成り立っていないことが分かる．

### 3.2 Fernández et al. [6] の結果

次に Fernández et al. [6] の結果を紹介する．ここでは，$r(z) \equiv r\ (\geq 0)$，$\mu(z) \equiv \mu$，$\sigma(z) \equiv \sigma\ (> 0)$，$\lambda(z) \equiv \lambda\ (> 0)$ とする．したがって，危険資産は Black-Scholes モデルで，リスク過程は Cramér-Lundberg モデルの場合を考えている．また，$\{N_t\}$ と $\{W_t^{(1)}\}$ は独立とする．効用関数はリスク回避型の一般の場合を考えている，つまり，効用関数 $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は，$C^2(\mathbb{R})$ で，狭義単調増加かつ狭義凹な関数とする．また，$P(|\pi_t| \leq A_\pi,\ 0 \leq t \leq T) = 1$ を満たすとき，許容戦略と呼ぶ．ただし，$A_\pi$ は戦略に依存した定数とする．このとき，

$$W(s, x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} E_{s,x}\left[U\left(X_T^\pi\right)\right]$$

とおくと，$W(s, x)$ は次の Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程式に従う：

$$V_t + \sup_{\pi \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} \pi^2 V_{xx} + \{\pi(\mu - r) + rx\} V_x \right\} + cV_x + \lambda \int_0^\infty \{V(t, x - y) - V(t, x)\} \nu(dy) = 0, \tag{3.1}$$

$$V(T, x) = U(x).$$

特に，指数型効用の場合に，HJB 方程式 (3.1) を用いて次の結果が得られている．

**定理 3.5** *(Theorem 3.1 in Fernández et al. [6])* $\int_0^\infty \exp(4\gamma y e^{rT}) \nu(dy) < \infty$ ならば，値関数は

$$W(t, x) = -\frac{1}{\gamma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} (T - t) + \frac{c\gamma}{r} (1 - e^{r(T-t)}) + \lambda \int_t^T \beta_s ds - \gamma x e^{r(T-t)} \right\}$$

で，最適戦略は

$$\pi_t^* = \frac{\mu - r}{\gamma \sigma^2} e^{-r(T-t)}$$

で与えられる．ただし，$\beta_t := \int_0^\infty \{\exp(\gamma y e^{r(T-t)}) - 1\} \nu(dy)$ とする．また，$r = 0$ のとき，それぞれ次のようになる：

$$W(t, x) = -\frac{1}{\gamma} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\mu}{\sigma^2} (T - t) + c\gamma(T - t) + \lambda \beta_T (T - t) - \gamma x \right\}, \quad \pi_t^* = \frac{\mu}{\gamma \sigma^2}.$$

この最適戦略は，それぞれ定理 3.1 および 3.3 (Browne [4] の Theorem 1 および 5) の $\rho_0 = 0$ の場合に対応していることが分かる．Fernández et al. [6] の Theorem 2.1 では，一般のリスク回避型効用関数に対する verification theorem も与えられている．

次に破産確率の結果について紹介する．

**命題 3.6** *(Proposition 4.1 in Fernández et al. [6])*

*1.* $Y_i$ の分布は，$0 < u < K \leq \infty$ に対してラプラス変換 $L(u)$ が存在するとする．また，$K < \infty$ のとき $\lim_{u \to K} L(u) = \infty$ で，$r \geq 0$ のとき，

$$\left\{ c + \frac{(\mu - r)^2}{\gamma \sigma^2} \right\} e^{-rT} - \lambda\theta > 0$$

を満たすとする．ただし，$E[Y_1] = \theta$ とする．このとき，破産確率は

$$P\left(\sup_{s \le t} -X_s^* \ge 0\right) \le e^{-\delta^* z}$$

となる．ただし，$\delta^*$ は次の方程式の正の解とする：

$$h_r(\delta) = -\delta \left\{ c + \frac{(\mu - r)^2}{\gamma \sigma^2} \right\} e^{-rT} + \frac{\delta^2}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\gamma^2 \sigma^2} e^{-2rT} + \lambda(L(\delta) - 1) = 0.$$

2. $r = 0$ で，$\delta^1$ を次の方程式の解とする：$h^1(\delta) = -\delta c + \lambda(L(\delta) - 1) = 0$ とする．$\frac{\delta^1}{2} < \gamma < \frac{1}{\theta}$ のとき，$\delta^1 < \delta^*$ が成り立つ．

この $\delta^1$ は Lundberg 係数を表し，ここでは投資がある分，良いレートを得ている．この命題の結果は，Gaier et al. [8] や Hipp et al. [12] の結果を含んだものになっている．また，Proposition 4.2 in Fernández et al. [6] では，$Y_i$ が平均 $\theta$ の指数分布に従う場合に，より詳しい結果を与えている．

### 3.3 **Badaoui et al.** [3] の結果

Badaoui et al. [3] の結果について紹介する．ここでは，強度は $\lambda(z) \equiv \lambda\ (> 0)$ とし，フィルトレーションは $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s^{(1)},\ W_s^{(2)},\ Y_i \mathbf{1}_{i \le N_s}; s \le t, i \ge 1)$ とする．したがって，リスク過程は Cramér-Lundberg モデルの場合を考えている．危険資産にはファクタモデル，特に確率的ボラティリティモデルを採用している．例えば，$g(z) = \alpha(\kappa - z)$（$\alpha > 0$，$\kappa$ は定数），$\mu(z) \equiv \mu$，$\sigma(z) = e^z$ のとき Scott モデルと呼ばれる．確率的ボラティリティモデルの詳細は Fouque et al. [7] を参照せよ．また，$\{N_t\}$ と $\{W_t^{(1)}\}, \{W_t^{(2)}\}$ は独立とする．

$r(z)$ は正値な連続関数で，任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して $r(z) < \mu(z)$ を満たすとする．ここでの許容戦略は，前節と同様の条件を満たす戦略のことをいう．このとき，

$$W(s,x,z) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} E_{s,x,z}\left[U(X_T^\pi)\right]$$

を考える．$W(s,x,z)$ は次の HJB 方程式に従う：

$$\lambda \int_0^\infty \{V(t,x-y,z) - V(t,x,z)\}\nu(dy) + \sup_{\pi \in \mathbb{R}} \mathcal{L}^\pi V(t,x,z) = 0,\ V(T,x,z) = U(x). \tag{3.2}$$

ただし，生成作用素は次のように定義する：

$$\mathcal{L}^\pi V(t,x,z) = V_t + \frac{1}{2}\sigma(z)^2 \pi^2 V_{xx} + \frac{1}{2}\sigma_f^2 V_{zz} + \rho \sigma_f \pi \sigma(z) V_{xz} + (c + (\mu(z) - r(z))\pi + r(z)x)V_x + g(z)V_z.$$

特に，指数型効用関数を用いて，$\rho = 0$，$r(z) \equiv r\ (> 0)$，$g(z)$ は一様リプシッツかつ有界な関数とする．また，$\frac{(\mu(z)-r)^2}{\sigma(z)^2}$ は有界かつ 1 階微分も有界と仮定するとき，$V(t,x,z) :=$

$-\xi(t,z)\exp\left(-\gamma x e^{r(T-t)}\right)$ とおくと，$\xi(t,z)$ は次の方程式を満たす：

$$-\xi_t - \frac{1}{2}\sigma_f^2\xi_{zz} + c\gamma e^{r(T-t)}\xi - \lambda\xi\int_0^\infty \left(e^{\gamma y e^{r(T-t)}} - 1\right)\nu(dy) - g(z)\xi \tag{3.3}$$
$$+\sup_{\pi\in\mathbb{R}}\left\{-\frac{1}{2}\sigma(z)^2\pi^2\gamma^2 e^{2r(T-t)} + \gamma\xi e^{r(T-t)}(\mu(z)-r)\pi\right\} = 0,\ \xi(z,T) = 1.$$

このとき，方程式 (3.3) の一意解 $\widehat{\xi}(t,z)$ を用いて次の結果が得られる。

**定理 3.7** *(Theorem 4.2 in Badaoui et al.* [3]*)* $\int_0^\infty \exp(8\gamma y e^{rT})\nu(dy) < \infty$, $\int_0^\infty y\exp(8\gamma y e^{rT})\nu(dy) < \infty$ を仮定する．このとき，値関数は $W(t,x,z) = -\widehat{\xi}(t,z)\exp\left(-\gamma x e^{r(T-t)}\right)$ で，最適戦略は $\pi_t^* = \frac{\mu(Z_t)-r}{\gamma\sigma(Z_t)^2}e^{-r(T-t)}$ となる．$r = 0$ のときは，$W(t,x,z) = -\widehat{\xi}(t,z)\exp(-\gamma x)$ で，$\pi_t^* = \frac{\mu(Z_t)}{\alpha\sigma(Z_t)^2}$ となる．

Badaoui et al. [3] の Theorem 4.1 では，(3.3) の解の存在と一意性について論じられている．また，Theorem 6.1 では，破産確率に対する Lundberg 係数の上限を，$\sigma_0 \le \sigma(\cdot) \le \sigma_1$ かつ $r < \mu_0 \le \mu(\cdot) \le \mu_1$ を満たす定数が存在するという仮定の下で与えている．

## 3.4 Hata et al. [10] の主結果

Hata et al. [10] の結果を紹介する．ここでは，$r(z) = r\ (\ge 0)$, $\mu(z) = Az + a$, $g(z) = Bz + b$, $\sigma(z) \equiv \sigma\ (> 0)$, $\lambda(z) = \Lambda z^2 + \lambda_0$ とする．ただし，$A$, $a$, $B$, $b$ は定数，$\Lambda$, $\lambda_0$ は正の定数とする．したがって，危険資産にはファクタ過程を仮定し，倒産件数 $N_t$ には Cox 過程を仮定する．また，$\mathcal{F}_t = \sigma(W_s^{(1)}, W_s^{(2)}, N_s, Y_i\mathbf{1}_{N_s\le t} : s \le t,\ i \ge 1)$ とする．ここでは，$\int_t^T |\pi_s|^2 ds < \infty$ a.s. が成り立つとき，$\pi_t$ は許容戦略と呼ぶ．以下の結果は，多次元の場合でも成り立つが，ここでは 1 次元の形で結果を述べておく．

指数型効用関数に対して，次の期待効用最大化問題を考える：

$$W(s,x,z) = \sup_{\pi\in\mathcal{A}} E_{s,x,z}\left[U(X_T^\pi)\right].$$

このとき，次の結果が得られる．

**定理 3.8** *(Theorem 3.1 in Hata et al.* [10]*)* $\int_0^\infty \exp(2\gamma y e^{rT})\nu(dy) < \infty$ を仮定する．このとき，最適戦略 $\pi_t^*$ と値関数 $W(t,x,z)$ は次で与えられる：

$$\pi_t^* = \frac{1}{\gamma}e^{-r(T-t)}\sigma^{-2}\left(a - r + AZ_t - \rho\sigma\sigma_f D\widehat{v}(t,Z_t)\right),$$
$$W(t,x,z) = -\frac{1}{\gamma}\exp\left(-\widehat{v}(t,z) - c\gamma\int_t^T e^{r(T-s)}ds + \lambda_0\int_t^T\int_0^\infty\left(e^{\gamma y e^{r(T-s)}} - 1\right)\nu(dy)ds - \gamma x e^{r(T-t)}\right).$$

ただし，$\widehat{v}(t,z) := \frac{1}{2}P(t)z^2 + q(t)z + k(t)$ で，$P(t)$，$q(t)$，$k(t)$ はそれぞれ次の常微分方程式の解とする：

$$
\begin{aligned}
&P_t(t) + 2\left(B - A\frac{\rho\sigma_f}{\sigma}\right)P(t) + \frac{A^2}{\sigma^2} - 2\Lambda\int_0^\infty \left(e^{\gamma y e^{r(T-t)}} - 1\right)\nu(dy) = 0,\ P(T) = 0,\\
&q_t(t) + \left(B - A\frac{\rho\sigma_f}{\sigma}\right)q(t) + P(t)b + (A - \rho\sigma\sigma_f P(t))\frac{a-r}{\sigma^2} = 0,\ q(T) = 0,\\
&k_t(t) + \frac{1}{2}\sigma_f^2 P(t) + q(t)\left\{b - \rho\sigma_f\frac{a-r}{\sigma}\right\} + \frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{\sigma^2} = 0, \quad k(T) = 0.
\end{aligned}
$$

# References


[1] 井上昭彦, 中野張, 福田敬 (2014) “ファイナンスと保険の数理.”, 岩波書店.

[2] ミコシュ, T（著）, 山岸義和（訳） (2009) “損害保険数理.”, シュプリンガー・ジャパン.

[3] Badaoui, M and Fernández, B (2013) “An optimal investment strategy with maximal risk aversion and its ruin probability in the presence of stochastic volatility on investments.”, *Insurance Math. Econom.* **53**(1), 1–13.

[4] Browne, S (1995) “Optimal investment policies for a firm with a random risk process: Exponential utility and minimizing the probability of ruin”, *Math. Oper. Res.* **20**(4), 937–958.

[5] Ferguson, TS (1965) “Betting systems which minimize the probability of ruin”, *J Soc Indust Appl Math.* **13**(3), 795–818.

[6] Fernández, B, Hernández, D, Meda, A and Saavedra, P. (2008) “An optimal investment strategy with maximal risk aversion and its ruin probability”, *Math. Methods Oper. Res.* **68**(1), 159–179.

[7] Fouque, J.-P., Papanicolaou, G. and Sircar, K.R. (2000) “Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility”, Cambridge University Press.

[8] Gaier, J, Grandits, P and Schachermayer W. (2003) “Asymptotic ruin probability and optimal investment”, *Ann Appl Probab.* **13**, 1054–1076.

[9] Grandell, J. (1991) “Aspects of Risk Theory”, *Springer-Verlag, New York.*

[10] Hata, H and Yasuda, K “Expected exponential utility maximization of insurers with a Linear Gaussian stochastic factor model”, *preprint.*

[11] Hipp, C and Plum, M (2000) “Optimal investment for insurers”, *Insurance Math Econom.* **27**, 215–228.

[12] Hipp, C and Schmidli, H (2004) “Asymptotics of ruin probabilities for controlled risk processes in the small claims case”, *Scand Actuar J.* **5**, 321–335.

[13] Lundberg, F (1903) “Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen. Återförsäkring av kollektivrisker”, *Akad. Afhandling. Almqvist och Wiksell, Uppsala.*

[14] Wang, N (2007) “Optimal investment for an insurer with exponential utility preference”, *Insurance Math Econom.* **40**(1), 77–84.

[15] Yang, H and Zhang, L (2005) “ Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process”, *Insurance Math Econom.* **37**(3), 615–634.